Función generadora de sucesiones periódicas con ciclo elegible.

Miguel Cerdá Bennassar - Julio de 2021

Resumen

En este documento se presenta un algoritmo que define una función generadora de secuencias con singulares propiedades, que convergen a valores previamente elegidos y acaban entrando en un ciclo infinito con los números previstos.

Palabras clave

Sucesiones numéricas, secuencias, ciclos, conjetura de Collatz.

Definiciones

f(k) es la función del algoritmo
k es $\forall \ \mathbb{N}$
k(n) es $\forall \ \mathbb{Z}$
m es $\forall \ \mathbb{Z}$
Ciclo es la iteración repetida e infinita con los números de la secuencia k(n)=1-m y k(n)=2-m

Introducción

Con esta función, todas las secuencias entrarán en un ciclo con dos números $\mathbb{Z}$, que podemos elegir, porque llegarán hasta k(n)=2-m, que itera al número k(n)=1-m y éste nuevamente al número k(n)=2-m, entrando en un ciclo infinito.

Se define este algoritmo como la función f(k) tal que:

$$f(k) = \begin{cases} \text{m par} & \begin{cases} \text{k par} & (k-m)/2 \\ \text{k impar} & (3k+1+m)/2 \end{cases} \\ \text{m impar} & \begin{cases} \text{k par} & (3k+1+m)/2 \\ \text{k impar} & (k-m)/2 \end{cases} \end{cases}$$

Se itera sobre k en función de su paridad y de la paridad de m, generando una sucesión de interacciones $\{k, f1(k_n), f2(k_n), ..., fn(k_n)\}$ cuyo menor elemento es 1-m.

Para $\forall$ k $\in \mathbb{N}$, en un número finito de iteraciones, k(n)=1-m.

Ejemplo de valores del último elemento de la secuencia k(n), según el valor de m:

Valor de m	k(n)
1	0
0	1
-1	2
-2	3
. . .	. . .
2	-1
3	-2
4	-3
5	-4
. . .	. . .

Algunas secuencias:

1 - Una sucesión llegará hasta el número 11, asignando a m el valor de -10.

Se aplica la función para m par:
$$\begin{cases} k \text{ par} & (k-m)/2 \\ k \text{ impar} & (3k+1+m)/2 \end{cases}$$

f(k) = 85, 123, 180, 95, 138, 74, 42, 26, 18, 14, 12, 11, 12, 11 . . .

Cálculos:

(85 * 3 - 9) / 2 = 123
(123 * 3 - 9) / 2 = 180
(180 + 10) / 2 = 95
(95 * 3 - 9) / 2 = 138
(138 + 10) / 2 = 74
(74 + 10) / 2 = 42
(42 + 10) / 2 = 26
(26 + 10) / 2 = 18
(18 + 10) / 2 = 14
(14 + 10) / 2 = 12
(12 + 10) / 2 = 11
(11 * 3 - 9) / 2 = 12
(12 + 10) / 2 = 11
. . .

2 - Una sucesión llegará hasta el número -4, asignando a m el valor de 5.

Se aplica la función para m impar: $\begin{cases} k \text{ par} & (3k+1+m)/2 \\ k \text{ impar} & (k-m)/2 \end{cases}$

f(k) = 1149, 572, 861, 428, 645, 320, 483, 239, 117, 56, 87, 41, 18, 30, 48, 75, 35, 15, 5, 0, 3, -1, -3, -4 . . .

Cálculos:

(1149 - 5) / 2 = 572
(572 x 3 + 6) / 2 = 861
(861 - 5) / 2 = 428
(428 x 3 + 6) / 2 = 645
(645 - 5) / 2 = 320
(320 x 3 + 6) / 2 = 483
(483 - 5) / 2 = 239
(239 - 5) / 2 = 117
(117 - 5) / 2 = 56
(56 x 3 + 6) / 2 = 87
(87 - 5) / 2 = 41
(41 - 5) / 2 = 18
(18 x 3 + 6) / 2 = 30
(30 x 3 + 6) / 2 = 48
(48 x 3 + 6) / 2 = 75
(75 - 5) / 2 = 35
(35 - 5) / 2 = 15
(15 - 5) / 2 = 5
(5 - 5) / 2 = 0
(0 x 3 + 6) / 2 = 3
(3 - 5) / 2 = -1
(-1 - 5) / 2 = -3
(-3 - 5) / 2 = -4
(-4 x 3 + 6) / 2 = -3
(-3 - 5) / 2 = -4
. . .

3 - Una secuencia generada con los valores k=1154 y m=0.

Se aplica la función para m par: $\begin{cases} k \text{ par} & (k-m)/2 \\ k \text{ impar} & (3k+1+m)/2 \end{cases}$

Cálculos:

1154 / 2 = 577
(577 * 3 +1) / 2 = 866
866 / 2 = 433
(433 * 3 +1) / 2 = 650
650 / 2 = 325
(325 * 3 +1) / 2 = 488
488 / 2 = 244
244 / 2 = 122
122 / 2 = 61
(61 * 3 +1) / 2 = 92
92 / 2 = 46
46 / 2 = 23
(23 * 3 +1) / 2 = 35
(35 * 3 +1) / 2 = 53
(53 * 3 +1) / 2 = 80
80 / 2 = 40
40 / 2 = 20
20 / 2 = 10
10 / 2 = 5
(5 * 3 +1) / 2 = 8
8 / 2 = 4
4 / 2 = 2
2 / 2 = 1
(1 * 3 +1) / 2 = 2
2 / 2 = 1
. . .

Esta secuencia coincide con una secuencia obtenida con el algoritmo de la conjetura de Collatz, porque (k-0)/2= k/2 y (3k+1+0)/2=(3k+1)/2. Todas las secuencias obtenidas con m=0 llegarán hasta el número 1-m=1.

Conclusión

La función presentada en este escrito genera infinitas secuencias que para $\forall$ k $\in \mathbb{N}$ llegan siempre hasta (1-m) $\in \mathbb{Z}$.

La demostración por inducción de esta propiedad resulta obvia, porque si las sucesiones obtenidas con m=1 llegan hasta el número 1-m=0 y las sucesiones obtenidas con m=1+1=2 llegan hasta el número 1-m=-1, las sucesiones obtenidas con m=1+n llegarán al número 1-m=-n.

Con m=1, f(k) = 38, 58, 88, 133, 66, 100, 151, 75, 37, 18, 28, 43, 21, 10, 16, 25, 12, 19, 9, 4, 7, 3, 1, 0.

Con m=2, f(k) = 782, 390, 194, 96, 47, 72, 35, 54, 26, 12, 5, 9, 15, 24, 11, 18, 8, 3, 6, 2, 0, -1.

Con m=99, f(k) = 971, 436, 704, 1106, 1709, 805, 353, 127, 14, 71,-14, 29,-35,-67,-83,-91, -95, -97, -98.

El autor manifiesta que todo el contenido de este escrito es original, por lo que no hay ninguna cita bibliográfica.

Miguel Cerdá Bennassar.
Mallorca, 27 de Julio de 2021